

Feuilletage canonique sur le fibré de Weil

Basile Guy Richard BOSSOTO

Université Marien NGOUABI
Faculté des Sciences, Département de Mathématiques
BP : 69, Brazzaville, Congo.
E-mail : bossotob@yahoo.fr

Abstract : Let be M a smooth manifold, A a local algebra and M^A a manifold of infinitely near points on M of kind A . We build the canonical foliation on M^A et we show that the canonical foliation on the tangent bundle TM is the foliation defined by his canonical field.

Résumé : Soit M une variété différentielle, A une algèbre locale et M^A la variété des points proches de M d'espèce A . Nous construisons le feuilletage canonique sur M^A et montrons que le feuilletage canonique du fibré tangent TM , est le feuilletage défini par son champ canonique.

MSC (2000) : 58A32, 58A20, 57R30, 13N15

Mots clés : Points proches, algèbre locale, feuilletages, dérivations.

1 Préliminaires

1.1 Dérivation d'une algèbre

Soit A une algèbre commutative et unitaire sur \mathbb{R} et \mathfrak{M} un A -module. Une dérivation de A dans \mathfrak{M} est une application \mathbb{R} -linéaire $d : A \longrightarrow \mathfrak{M}$ telle que

$$d(ab) = d(a)b + ad(b)$$

pour tous $a, b \in A$. Evidemment $d(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

On note $Der(A, \mathfrak{M})$ le A -module des dérivations de A dans \mathfrak{M} . Lorsque $\mathfrak{M} = A$, une dérivation de A dans A est simplement appelée dérivation de A et on note $Der_{\mathbb{R}}(A)$ où simplement $Der(A)$ s'il n'y a pas de confusion, le A -module des dérivations de A .

Si A et B sont deux algèbres quelconque et si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un homomorphisme d'algèbres, alors B est un A -module.

Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'algèbres. Une application \mathbb{R} -linéaire $d : A \longrightarrow B$ est une φ -dérivation si

$$d(ab) = d(a)\varphi(b) + \varphi(a)d(b)$$

pour tous $a, b \in A$.

1.2 Algèbre locale et variété des points proches

Une algèbre locale au sens de Weil est une algèbre réelle commutative unitaire A , de dimension finie sur \mathbb{R} , ayant un idéal maximal unique \mathfrak{m} de codimension 1. On a ainsi

$$A = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{m}.$$

Dans ce cas, compte tenu du lemme de Nakayama, l'idéal maximal \mathfrak{m} est nilpotent. Le plus petit entier positif k tel que $\mathfrak{m}^{k+1} = (0)$ est la hauteur de A et la dimension sur \mathbb{R} de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est la largeur ou la profondeur de A .

Lorsque A est une algèbre locale (de dimension finie), l'ensemble $Der(A)$ des dérivations de A est une algèbre de Lie de dimension finie : c'est l'algèbre de Lie du groupe de Lie $Aut(A)$ des automorphismes de A .

Dans toute la suite, M est une variété différentielle paracompacte de classe C^∞ de dimension n et A une algèbre locale au sens de Weil. On note $C^\infty(M)$ l'algèbre des fonctions numériques de classe C^∞ sur M , $\mathfrak{X}(M)$ le $C^\infty(M)$ -module des champs de vecteurs sur M et TM l'espace tangent à M .

Un point proche de $p \in M$ d'espèce A [7], est un homomorphisme d'algèbres

$$\xi : C^\infty(M) \longrightarrow A$$

tel que, pour tout $f \in C^\infty(M)$,

$$[\xi(f) - f(p)] \in \mathfrak{m}.$$

On note M_p^A l'ensemble des points proches de $p \in M$ d'espèce A et

$$M^A = \bigcup_{p \in M} M_p^A.$$

L'ensemble $M^A = Hom_{Alg}(C^\infty(M), A)$ est une variété différentielle de dimension $\dim(M) \cdot \dim(A)$ et est appelé variété des points proches de M d'espèce A [7] ou simplement fibré de Weil d'espèce A .

1. Lorsque $A = \mathbb{R}$, on identifie $M^{\mathbb{R}}$ à M par l'application

$$M \longrightarrow M^{\mathbb{R}} = \text{Hom}_{A\text{lg}}(C^{\infty}(M), \mathbb{R}), p \longmapsto \{f \longmapsto f(p)\}.$$

2. Lorsque V est un espace vectoriel de dimension finie p dont une base est (v_1, \dots, v_p) , si (v_1^*, \dots, v_p^*) désigne la base duale de (v_1, \dots, v_p) , alors l'application

$$V^A \xrightarrow{\theta} V \otimes A, \xi \longmapsto \sum_{i=1}^p v_i \otimes \xi(v_i^*)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. Lorsque $A = \mathbb{D} = \{a + \varepsilon b : a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$ est l'ensemble des nombres duaux, qui est isomorphe à l'algèbre des polynômes tronqués $\mathbb{R}[x] / (x^2)$, on note $(1^*, \varepsilon^*)$ la base duale de la base canonique $(1, \varepsilon)$ de \mathbb{D} . La variété $M^{\mathbb{D}}$ est identifiée au fibré tangent TM par l'application

$$M^{\mathbb{D}} \longrightarrow TM, \xi \longmapsto \varepsilon^* \circ \xi$$

L'application réciproque étant

$$TM \longrightarrow M^{\mathbb{D}}, v \longmapsto \{\xi : f \longmapsto f(p) + \varepsilon \cdot v(p)\}$$

si $v \in T_p M$.

4. Plus généralement, si $A = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_s] / (x_1, \dots, x_s)^{k+1}$, alors $M^A = J_0^k(\mathbb{R}^s, M)$.

1.3 Champs de vecteurs sur M^A

L'ensemble, $C^{\infty}(M^A, A)$, des fonctions de classe C^{∞} sur M^A à valeurs dans A est une A -algèbre commutative unitaire, d'unité l'application

$$1_{C^{\infty}(M^A, A)} : \xi \longmapsto 1_A.$$

Pour $f \in C^{\infty}(M)$, l'application

$$f^A : M^A \longrightarrow A, \xi \longmapsto \xi(f)$$

est de classe C^{∞} et l'application

$$C^{\infty}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M^A, A), f \longmapsto f^A$$

est un homomorphisme d'algèbres.

Si $(a_i)_{i=1,\dots,s}$ est une base de A et $(a_i^*)_{i=1,\dots,s}$ la base duale, on identifie $C^\infty(M^A, A)$ à $A \otimes C^\infty(M^A)$ par l'application

$$\sigma : \varphi \longmapsto \sum_{i=1}^s a_i \otimes (a_i^* \circ \varphi).$$

Ainsi, $\sigma(f^A) = \sum_{i=1}^s a_i \otimes (a_i^* \circ f^A)$ pour tout $f \in C^\infty(M)$.

On note

$$\gamma : C^\infty(M) \longrightarrow A \otimes C^\infty(M^A), f \longmapsto \sum_{i=1}^s a_i \otimes (a_i^* \circ f^A)$$

et $Der_\gamma [C^\infty(M), A \otimes C^\infty(M^A)]$ le $A \otimes C^\infty(M^A)$ -module des γ -dérivations de $C^\infty(M)$ dans $A \otimes C^\infty(M^A)$ c'est-à-dire l'ensemble des applications \mathbb{R} -linéaires

$$D : C^\infty(M) \longrightarrow A \otimes C^\infty(M^A)$$

telles que, pour f et g appartenant à $C^\infty(M)$,

$$D(fg) = D(f) \cdot \gamma(g) + \gamma(f) \cdot D(g).$$

Une dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$ [1], est une dérivation par rapport à l'homomorphisme

$$C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A), f \longmapsto f^A$$

c'est-à-dire, une application \mathbb{R} -linéaire

$$X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A)$$

telle que, pour f et g appartenant à $C^\infty(M)$,

$$X(fg) = X(f) \cdot g^A + f^A \cdot X(g).$$

L'ensemble $Der [C^\infty(M), C^\infty(M^A, A)]$, des dérivations de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$, est un $C^\infty(M^A, A)$ -module. D'après [5], [6], l'application

$$Der [C^\infty(M^A)] \longrightarrow Der_\gamma [C^\infty(M), A \otimes C^\infty(M^A)], X \longmapsto (id_A \otimes X) \circ \gamma,$$

est un isomorphisme de $C^\infty(M^A)$ -modules .

Il s'ensuit que l'application

$$Der [C^\infty(M^A)] \longrightarrow Der [C^\infty(M), C^\infty(M^A, A)], X \longmapsto \sigma^{-1} \circ (id_A \otimes X) \circ \gamma,$$

est un isomorphisme de $C^\infty(M^A)$ -modules qui permet de transporter sur $Der [C^\infty(M^A)]$ la structure de $C^\infty(M^A, A)$ -module de $Der [C^\infty(M), C^\infty(M^A, A)]$. On peut donc regarder un champ de vecteurs sur M^A comme une dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$ [1]

Proposition 1 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Un champ de vecteurs sur M^A est une section différentiable du fibré tangent (TM^A, π_{M^A}, M^A) ;*
2. *Un champ de vecteurs sur M^A est une dérivation de $C^\infty(M^A)$;*
3. *Un champ de vecteurs sur M^A est une dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$.*

Exemple 2 *Soit C est le champ de Liouville sur le fibré tangent TM . Dans un système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) sur la variété M , si $y_i = dx_i$ désigne la coordonnée sur la fibre,*

$$C = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

cest-à-dire $C(x_i) = 0$ et $C(y_i) = y_i$.

Puisque l'application

$$\gamma : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{D} \otimes C^\infty(TM), f \longmapsto 1 \otimes 1^* \circ f^{\mathbb{D}} + \varepsilon \otimes \varepsilon^* \circ f^{\mathbb{D}}$$

où

$$f^{\mathbb{D}}(v) = f(p) + \varepsilon \cdot v(f), v \in TpM$$

est telle que

$$\begin{aligned} \gamma(x_i)(1 \otimes v) &= [1 \otimes 1^* \circ x_i^{\mathbb{D}} + \varepsilon \otimes \varepsilon^* \circ x_i^{\mathbb{D}}]((1 \otimes v)) \\ &= 1 \otimes 1^*[x_i(p) + \varepsilon \cdot v(x_i)] + \varepsilon \otimes \varepsilon^*[x_i(p) + \varepsilon \cdot v(x_i)] \\ &= 1 \otimes x_i(p) + \varepsilon \otimes v(x_i) \\ &= [1 \otimes x_i + \varepsilon \otimes dx_i]((1 \otimes v)) \\ &= [1 \otimes x_i + \varepsilon \otimes y_i](1 \otimes v), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\gamma(x_i) = 1 \otimes x_i + \varepsilon \otimes y_i,$$

la dérivation $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(TM, \mathbb{D})$ correspondant au champ de Liouville C est donnée par

$$\begin{aligned} X(x_i) &= \sigma^{-1} \circ (id_{\mathbb{D}} \otimes C) \circ \gamma(x_i) \\ &= \sigma^{-1} \circ (id_{\mathbb{D}} \otimes C) \circ (1 \otimes x_i + \varepsilon \otimes y_i) \\ &= \sigma^{-1} \circ [1 \otimes C(x_i) + \varepsilon \otimes C(y_i)] \\ &= \varepsilon \cdot y_i. \end{aligned}$$

Dans toute la suite, nous regarderons un champ de vecteurs comme une dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$.

1.3.1 Champs de vecteurs sur M^A provenant des dérivations de A

Proposition 3 *Si d est une dérivation de A , alors l'application*

$$d^* : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A), f \longmapsto (-d) \circ f^A,$$

est un champ de vecteurs sur M^A .

Dmonstration: L'application d^* est \mathbb{R} -linéaire et pour f et g appartenant à $C^\infty(M)$ et pour $\xi \in M^A$, on a :

$$\begin{aligned} d^*(fg)(\xi) &= (-d) \circ (fg)^A(\xi) \\ &= (-d) \circ (f^A \cdot g^A)(\xi) \\ &= (-d) [f^A(\xi) \cdot g^A(\xi)] \\ &= (-d) [f^A(\xi)] \cdot g^A(\xi) + f^A(\xi) \cdot (-d) [g^A(\xi)] \\ &= [(-d) \circ f^A](\xi) \cdot g^A(\xi) + f^A(\xi) \cdot [(-d) \circ g^A](\xi) \\ &= ([(-d) \circ f^A] \cdot g^A + f^A \cdot [(-d) \circ g^A])(\xi) \\ &= [d^*(f) \cdot g^A + f^A \cdot d^*(g)](\xi). \end{aligned}$$

Comme ξ est quelconque, on déduit que

$$d^*(fg) = d^*(f) \cdot g^A + f^A \cdot d^*(g).$$

Ainsi, d^* est un champ de vecteurs sur M^A . ■

Le champ de vecteurs d^* est le champ de vecteurs sur M^A associé à la dérivation d de A et on a pour d_1, d_2, d trois dérivations de A et pour $a \in A$, on a [1] :

$$\begin{aligned} [d_1^*, d_2^*] &= [d_1, d_2]^* ; \\ (a \cdot d)^* &= a \cdot d^* . \end{aligned}$$

2 Feuilletage induit par les dérivations de A

Thorme 4 Soient d_1, \dots, d_r une base de $\text{Der}(A)$. Les champs de vecteurs, d_1^*, \dots, d_r^* induits par d_1, \dots, d_r sur M^A sont linéairement indépendants et définissent un feuilletage \mathcal{F}_r de dimension r sur M^A .

Dmonstration: Soient les applications $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in C^\infty(M^A, A)$ telles que $\varphi_1 \cdot d_1^* + \dots + \varphi_r \cdot d_r^* = 0$.

Pour $f \in C^\infty(M)$, et pour tout $\xi \in M^A$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= [\varphi_1 \cdot d_1^* + \dots + \varphi_r \cdot d_r^*](f)(\xi) \\ &= [\varphi_1 \cdot ((-d_1) \circ f^A) + \dots + \varphi_r \cdot ((-d_r) \circ f^A)](\xi) \\ &= -\varphi_1(\xi) \cdot d_1(\xi(f)) - \dots - \varphi_r(\xi) \cdot d_r(\xi(f)) \\ &= -[\varphi_1(\xi) \cdot d_1(\xi(f)) + \dots + \varphi_r(\xi) \cdot d_r(\xi(f))] \end{aligned}$$

Puisque les dérivations d_1, \dots, d_r sont linéairements indépendantes, on a alors

$$\varphi_1(\xi) = \dots = \varphi_r(\xi) = 0.$$

Comme ξ est quelconque, on conclut que

$$\varphi_1 = \dots = \varphi_r = 0$$

c'est-à-dire que les champs de vecteurs d_1^*, \dots, d_r^* sont linéairement indépendantes.

De plus, pour $i, j \in \{1, \dots, r\}$,

$$[d_i^*, d_j^*] = [d_i, d_j]^* .$$

Le système différentiel engendré par d_1^*, \dots, d_r^* est donc complètement intégrable. Il définit donc un feuilletage \mathcal{F}_r de dimension r que nous appelons feuilletage canonique sur M^A .

Ce qui achève la démonstration. ■

2.1 Feuilletage canonique sur le fibré tangent TM

Proposition 5 *Le feuilletage canonique sur le fibré tangent TM est le feuilletage défini par son champ de vecteurs canonique (champ de Liouville) C .*

Dmonstration: Soit d une dérivation de \mathbb{D} , alors

$$\begin{aligned} 0 &= d(\varepsilon^2) \\ &= d(\varepsilon \cdot \varepsilon) \\ &= 2\varepsilon \cdot d(\varepsilon) \end{aligned}$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $d(\varepsilon) = \lambda\varepsilon$. Toute dérivation de \mathbb{D} est donc de la forme telle que $d(\varepsilon) = \lambda\varepsilon$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit d_0 la dérivation de \mathbb{D} telle que $d_0(\varepsilon) = -\varepsilon$, alors $Der(\mathbb{D}) = \mathbb{R} \cdot d_0$ est l'algèbre de Lie de dimension 1, engendrée par d_0 .

Le champ de vecteurs provenant de la dérivation d_0 est l'application

$$d_0^* : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(TM, \mathbb{D}), f \longmapsto (-d_0) \circ f^{\mathbb{D}},$$

c'est-à-dire, si (x_1, \dots, x_n) est un système de coordonnées locales sur la variété M , et si (y_1, \dots, y_n) désignent les coordonnées sur la fibre,

$$\begin{aligned} (d_0^*)(x_i) &= (-d_0) \circ (x_i)^{\mathbb{D}} \\ &= -d_0 \circ (x_i + \varepsilon y_i) \\ &= -d_0 \circ [\varepsilon \cdot y_i] \\ &= \varepsilon \cdot y_i \end{aligned}$$

Le champ de vecteurs d_0^* est donc le champ de Liouville sur le fibré tangent et le feuilletage induit par d_0^* sur TM est par conséquent le feuilletage canonique de TM . ■

Références

- [1] B. Bossoto and E. Okassa, Champ de vecteurs et formes différentielles sur une variété des points proches, Archivum Math. 44 (2008) 159-171.
- [2] A. Morimoto, Prolongation of connections to bundles of infinitely near points, J.Diff.Geom., t.11, 1976, p. 479-498.

- [3] C. Ehresmann, Introduction a la th eorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie, Colloque du C.N.R.S., Strasbourg (1953), 97-110.
- [4] P. Kolár, P. W. Michor and J. Slovák, Natural Operations in Differential Geometry, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [5] E. Okassa, Prolongements des champs de vecteurs à des variétés des points proches, C.R. Acad. Sc. Paris, t.300, Série I, n° 6, 1985, p.173-176.
- [6] E. Okassa, Prolongement des champs de vecteurs à des variétés des points proches, Annales Faculté des Sciences de Toulouse, Vol. VIII, n° 3, 1986-1987, 349-366.
- [7] A. Weil, Théorie des points proches sur les variétés différentiables, Colloque Géom. Diff. Strasbourg, 1953, 111-117.